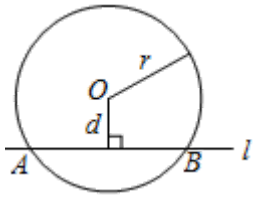
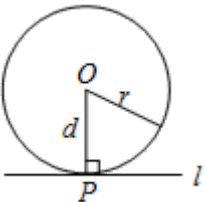
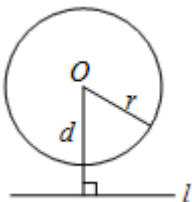


第2讲 圆的综合

一、直线与圆的位置关系

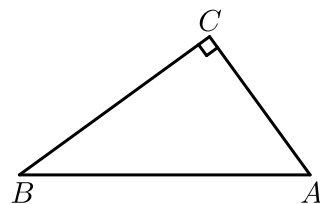
1. 直线与圆的三种位置关系

_____		_____个公共点	直线 l 与 $\odot O$ 有_____个公共点 A 、 B 时, 叫做直线 l 与 $\odot O$ _____, 此时, 直线 l 叫做 $\odot O$ 的_____.
_____		_____公共点	直线 l 与 $\odot O$ 有_____公共点 P 时, 叫做直线 l 与 $\odot O$ _____, 此时, 直线 l 叫做 $\odot O$ 的_____, 唯一公共点 P 叫做_____.
_____		_____公共点	直线 l 与 $\odot O$ _____公共点时, 叫做直线 l 与 $\odot O$ _____.

 举个“栗”子

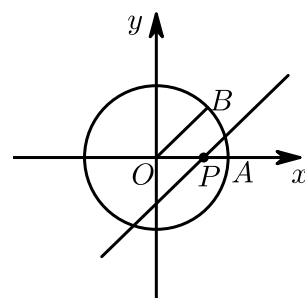
 栗子1

1. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$.

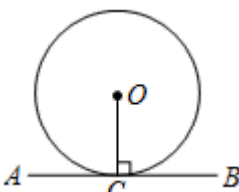
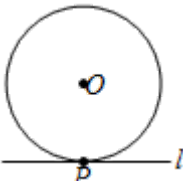
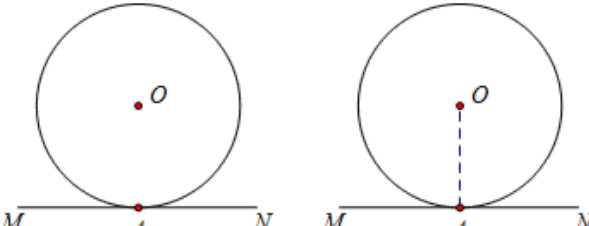


- (1) 若以点 C 为圆心, R 为半径所作的圆与直线 AB 相切, 则 $R =$ _____.
- (2) $\odot C$ 与直线 AB 相交, 则 R 的取值范围是 _____.
- (3) $\odot C$ 与直线 AB 相离, 则 R 的取值范围是 _____.

2. 如图， $\odot O$ 是以数轴原点 O 为圆心，半径为 1 的圆， $\angle AOB = 45^\circ$ ，点 P 在数轴上运动，过点 P 且与 OB 平行的直线与 $\odot O$ 有公共点，则 OP 的取值范围是 _____ .



2. 切线的性质与判定

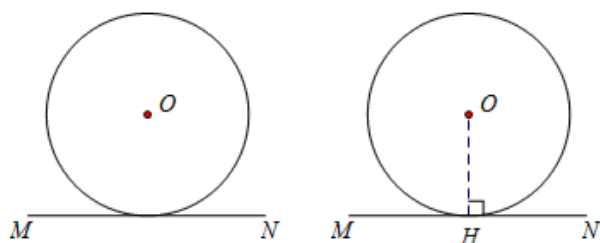
性质定理	圆的切线_____于过切点的_____ . 如图，若 AB 是 $\odot O$ 的切线，C 是切点，则_____ . 
切线判定	①定义法： 和圆只有一个公共点的直线是圆的切线 .  ②判定定理： 经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线 .（当题目欲求证的直线经过圆上的点时，一般用此方法 .） 方法：_____ .  连接 OA，证明 $OA \perp MN$ 即可推出 MN 为 $\odot O$ 的切线 .

切线 .

③距离法 :

圆心到直线的距离等于圆的半径的直线是圆的切线 . (当题目欲求证的直线没有明确说明经过圆上的点时 , 一般用此方法 .)

方法 : _____ .



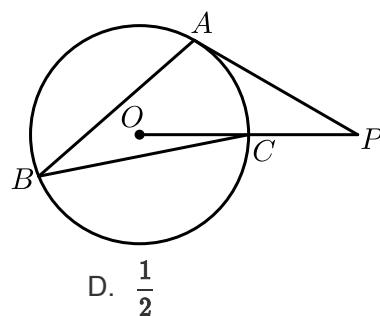
过点 O 作 $OH \perp MN$ 于 H , 证明 $OH = r$ 即可推出 MN 为 $\odot O$ 的切线 .

! 总结 :

- 1、出现圆的切线时 , 常连接过切点的 _____ , 得切线垂直半径 , 即见 _____ , 连 _____ .
- 2、证明圆的切线的方法 :
 - ①若给出直线与圆有公共点 : _____、 _____ ;
 - ②若没给直线与圆的交点 : _____、 _____ .

栗子3

3. 如图 , 已知 $\odot O$ 上三点 A, B, C , 半径 $OC = 1$, $\angle ABC = 30^\circ$, 切线 PA 交 OC 延长线于点 P , 则 PA 的长为 () .



A. 2

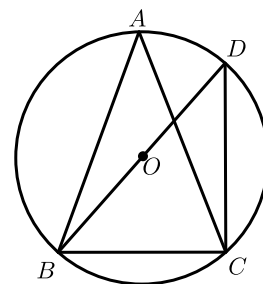
B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{1}{2}$

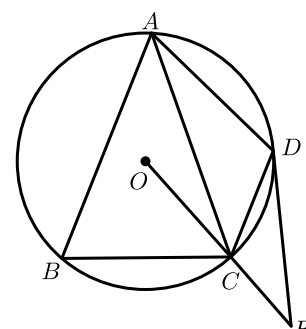
栗子4

4. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AB = AC$, $\angle BAC = 42^\circ$, 点 D 是 $\odot O$ 上一点 .
(1) 如图① , 若 BD 为 $\odot O$ 的直径 , 连接 CD , 求 $\angle DBC$ 和 $\angle ACD$ 的大小 .



图①

- (2) 如图②, 若 $CD \parallel BA$, 连接 AD , 过点 D 作 $\odot O$ 的切线, 与 OC 的延长线交于点 E , 求 $\angle E$ 的大小.



图②

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 以边 AB 上一点 O 为圆心, OA 为半径的圆与 BC 相切于点 D , 分别交 AB , AC 于点 E , F .

- (1) 如图 1, 连接 AD , 若 $\angle CAD = 25^\circ$, 求 $\angle B$ 的大小.

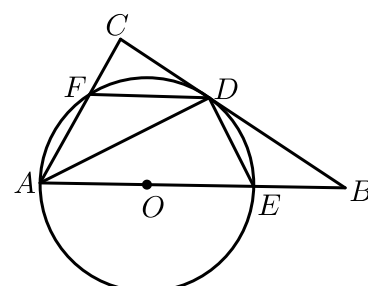


图 1

- (2) 如图 2, 若点 F 为 $\widehat{AD}$ 的中点, $\odot O$ 的半径为 2, 求 AB 的长.

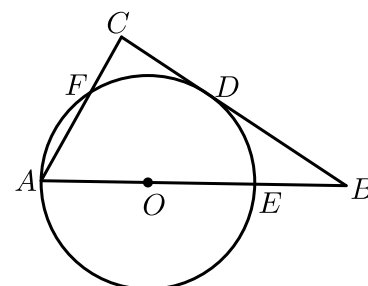
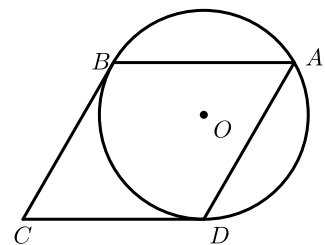


图 2

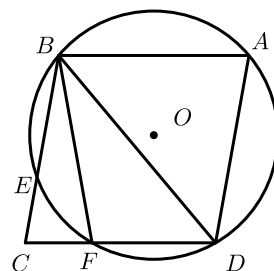
6. 已知, $ABCD$ 为菱形, 点 A , B , D 在 $\odot O$ 上.

- (1) 如图①, 若 CB , CD 为 $\odot O$ 的切线, 求 $\angle C$ 的大小.



图①

- (2) 如图②, BC , CD 与 $\odot O$ 分别交于点 E , 点 F , 连接 BF , 若 $\angle BDC = 50^\circ$, 求 $\angle CBF$ 的度数.



图②

栗子5

7. 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, $OC \perp AB$, 弦 DC 与 OB 交于点 F , 在直线 AB 上有一点 E , 连接 ED , 且有 $ED = EF$.

- (1) 如图1, 求证 ED 为 $\odot O$ 的切线.

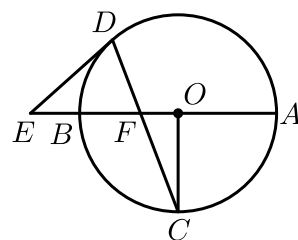


图1

- (2) 如图2, 直线 ED 与切线 AG 相交于 G , 且 $OF = 1$, $\odot O$ 的半径为 3, 求 AG 的长.

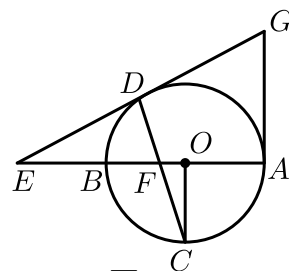
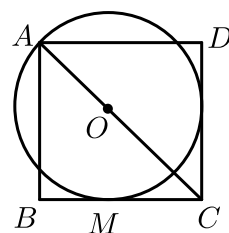


图2

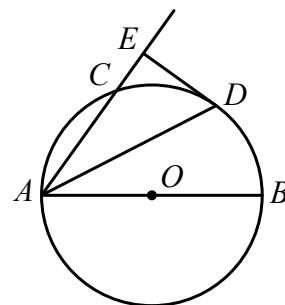
8. 如图, O 为正方形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点, 以 O 为圆心, OA 长为半径的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 M .



(1) 求证： CD 与 $\odot O$ 相切 .

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 1 , 求正方形 $ABCD$ 的边长 .

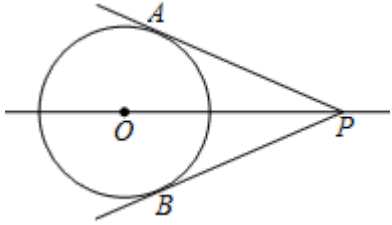
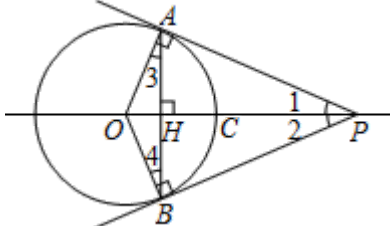
9. 如图 , AB 是 $\odot O$ 的直径 , AC 与 $\odot O$ 交于点 C , $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , $DE \perp AC$, 垂足为 E .



(1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线 .

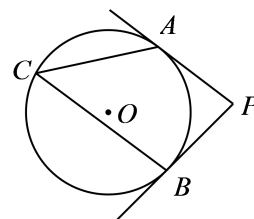
(2) 若直径 $AB = 10$, 弦 $AC = 6$, 求 DE 的长 .

3. 切线长定理

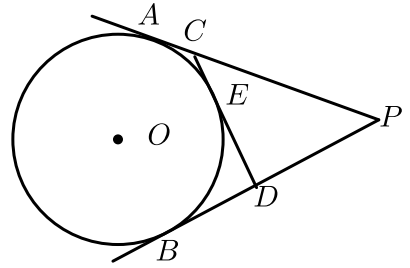
切线长	经过_____一点的圆的切线上，这点和切点之间线段的长，叫做这点到圆的切线长． 如图，过圆外一点 P 有两条直线 PA、PB 分别与 $\odot O$ 相切，线段_____、_____的长叫 $\odot O$ 的切线长． 
切线长定理	从_____一点引圆的两条切线，它们的切线长_____，这一点和圆心的连线_____两条切线的夹角． 如图，过 $\odot O$ 外一点 P 引 $\odot O$ 的两条切线 PA、PB，切点分别为 A、B．  【结论】： $\text{Rt}\triangle AOP \cong$ _____， $PA = PB$， $\angle 1 =$ _____ $=$ _____ $=$ _____， _____ 垂直平分 _____， $\widehat{AC} =$ _____．

栗子6

10. 如图， PA 、 PB 分别切 $\odot O$ 于 A 、 B ，若 $\angle C = 56^\circ$ ，则 $\angle P$ 的大小为（ ）．



- A. 68° B. 67° C. 66° D. 60°
11. 如图， PA 、 PB 切 $\odot O$ 于点 A 、 B ， $PA = 10$ ， CD 切 $\odot O$ 于点 E ，交 PA 、 PB 于 C 、 D 两点，则 $\triangle PCD$ 的周长是（ ）．



A. 10

B. 18

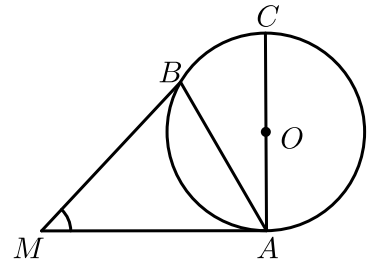
C. 20

D. 22

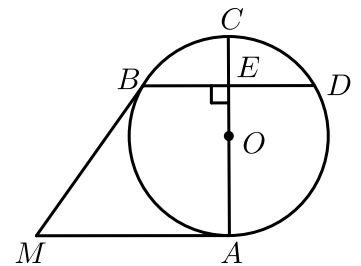
栗子7

12. 已知 $\odot O$ 中， AC 为直径， MA 、 MB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B 。

(1) 如图，若 $\angle BAC = 25^\circ$ ，求 $\angle AMB$ 的大小。

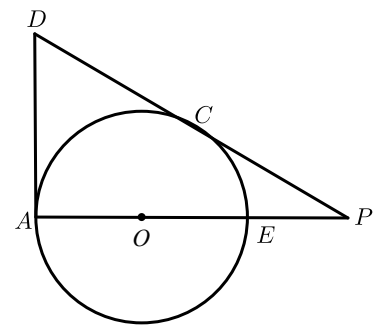


(2) 如图，过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 E ，交 $\odot O$ 于点 D ，若 $BD = MA$ ，求 $\angle AMB$ 的大小。



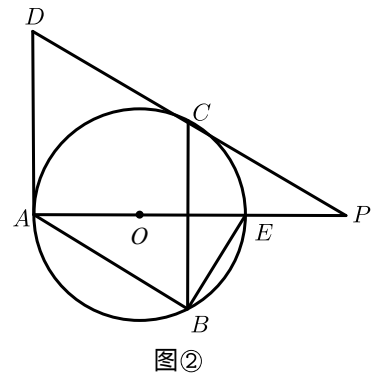
13. 已知 DA 、 DC 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 、 C ，延长 DC 交直径 AE 的延长线于点 P 。

(1) 如图①，若 $DC = PC$ ，求 $\angle P$ 的度数。



图①

(2) 如图②，在 $\odot O$ 上取一点 B ，连接 AB 、 BC 、 BE ，当四边形 $ABCD$ 是平行四边形时，求 $\angle P$ 及 $\angle AEB$ 的大小。



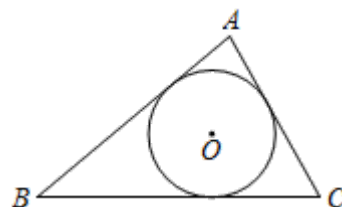
图②

4. 三角形的内切圆

三角形内切圆

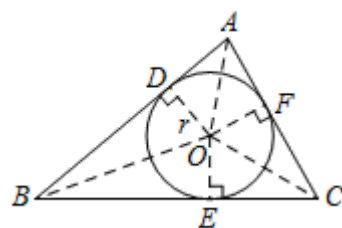
与三角形_____都相切的圆叫做三角形的内切圆，内切圆的圆心叫做三角形的_____。这个三角形叫做圆的外切三角形。

如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆， $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的外切三角形，点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心。

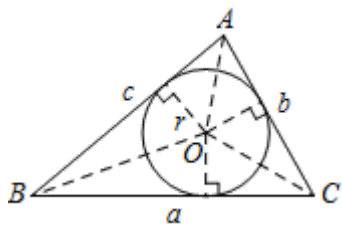
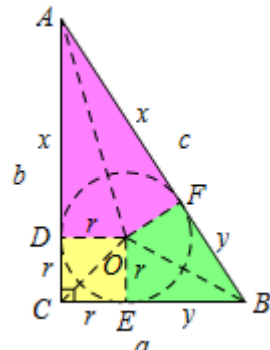


三角形有且只有_____内切圆，内心是三条_____的交点，内心到三边的距离相等，且等于三角形内切圆的半径。

如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，则 OA 平分 $\angle BAC$ ， OB 平分 $\angle ABC$ ， OC 平分 $\angle ACB$ ；
 $OD = OE = OF = r$ 。

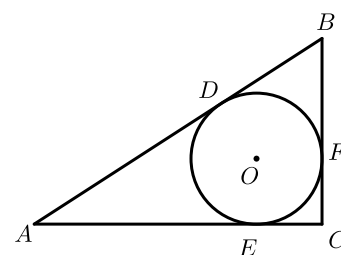


与三角形内切圆有关的两个重要结论

任意三角形	若三角形三边长分别为 a、b、c，内切圆半径为 r，则 $\triangle ABC$ 的面积_____。 
直角三角形	如果直角三角形的两直角边长分别为 a、b，斜边长为 c，则直角三角形的内切圆的半径_____。 

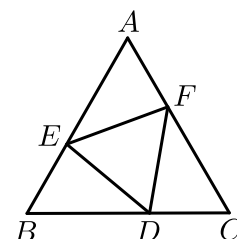
栗子8

14. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 5$ ， $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的三边相切于点 D 、 E 、 F ，若 $\odot O$ 的半径为 2，则 $\triangle ABC$ 的周长为（ ）。



- A. 14 B. 20 C. 24 D. 30

15. 如图，点 D 、 E 、 F 分别在正三角形 ABC 的三边上，且 $\triangle DEF$ 也是正三角形。若 $\triangle ABC$ 的边长为 a ， $\triangle DEF$ 的边长为 b ，则 $\triangle FDC$ 的内切圆半径为（ ）。



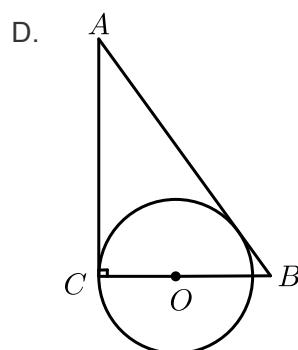
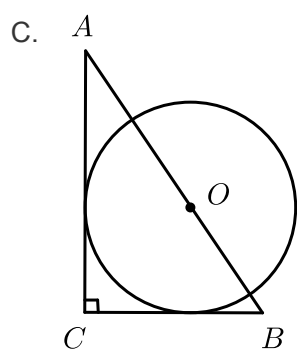
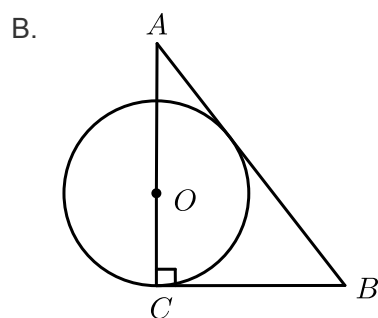
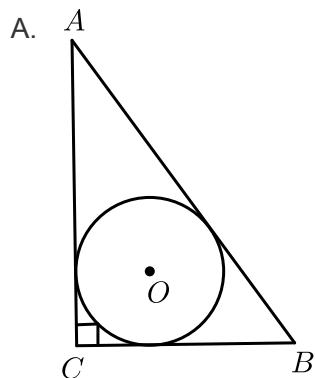
A. $\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{8}$

B. $\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{2}$

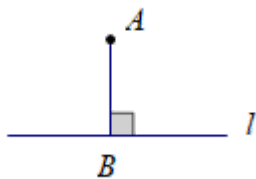
16. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\odot O$ 与三角形的边相切, 下列选项中, $\odot O$ 的半径为 $\frac{ab}{a+b}$ 的是 () .



二、圆中最值问题

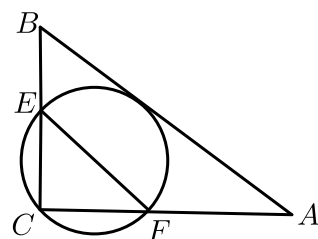
1. 垂线段最短

解题原理：点到直线的距离——_____ .



栗子9

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$, 经过点 C 且与边 AB 相切的动圆与 CB , CA 分别相交于点 E , F , 则线段 EF 长度的最小值是 () .



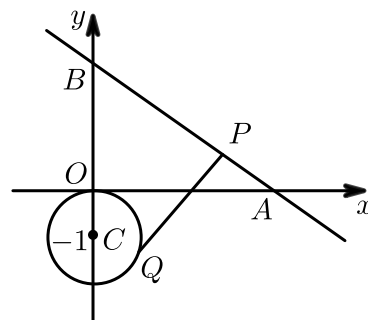
A. $4\sqrt{2}$

B. 4.75

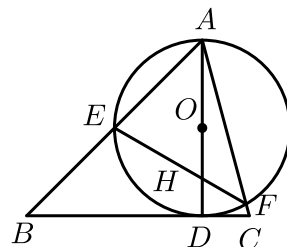
C. 5

D. 4.8

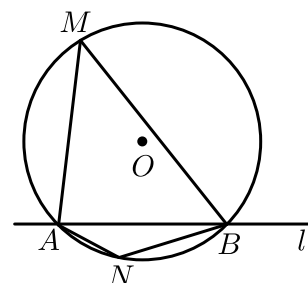
18. 如图，直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ；点 Q 是以 $C(0, -1)$ 为圆心、1 为半径的圆上一动点，过 Q 点的切线交线段 AB 于点 P ，则线段 PQ 的最小是 _____。



19. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{2}$ ， D 是线段 BC 上的一个动点，以 AD 为直径画 $\odot O$ 分别交于 AB 、 AC 于 E 、 F ，连接 EF ，则线段 EF 长度的最小值为 _____。

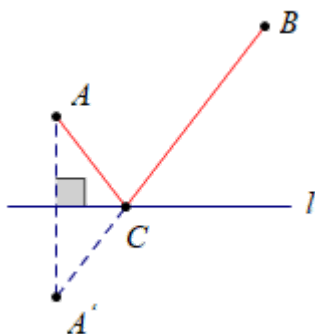


20. 已知 $\odot O$ 的半径是 2，直线 l 与 $\odot O$ 相交于 A 、 B 两点， M 、 N 是 $\odot O$ 上的两个动点，且在直线 l 的异侧，若 $\angle AMB = 45^\circ$ ，则四边形 $MANB$ 面积的最大值是 _____。

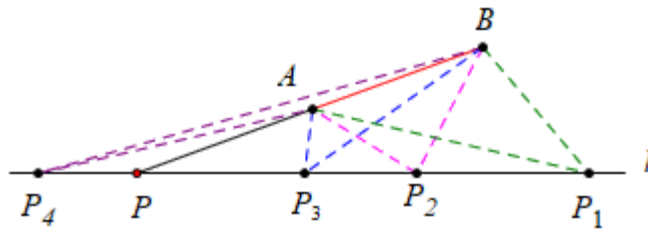


2. 将军饮马最值

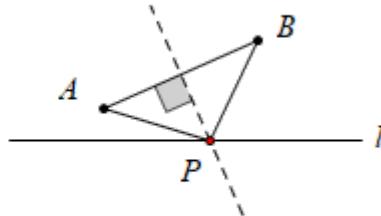
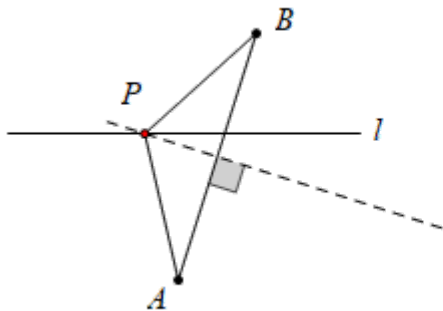
将军饮马模型：求线段和的最小值问题。



线段差的最大值： $|PA - PB|_{\max} = AB$ 。

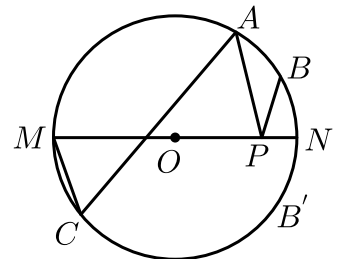


线段差的最小值： $|PA - PB|_{\min} = 0$.



栗子10

21. 如图， MN 是 $\odot O$ 的直径， A 、 B 、 C 是 $\odot O$ 上的三点， $\angle ACM = 60^\circ$ ， B 点是 $\widehat{AN}$ 的中点， P 点是 MN 上一动点，若 $\odot O$ 的半径为1，则 $PA + PB$ 的最小值为（ ） .



- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3} - 1$

3. 中位线

三角形的中位线等于_____；有时也可以通过构造中位线解题 .

栗子11

22. 回答下列问题：

- (1) 圆中最长的弦是 _____ .
- (2) 如图①， AB 是 $\odot O$ 的弦， $AB = 8$ ，点 C 是 $\odot O$ 上的一个动点，且 $\angle ACB = 45^\circ$ ，若点 M 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点，则 MN 长度的最大值是 _____ .

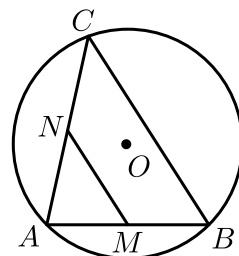
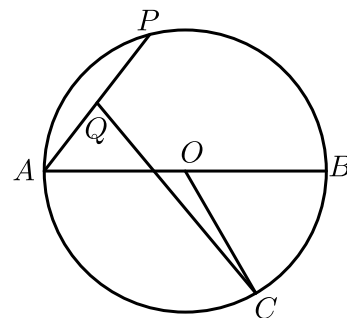


图 ①

23. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C 为 $\odot O$ 上一点，其中 $AB = 4$ ， $\angle AOC = 120^\circ$ ， P 为 $\odot O$ 上的动点，连 AP ，取 AP 中点 Q ，连 CQ ，则线段 CQ 的最大值为（ ）。

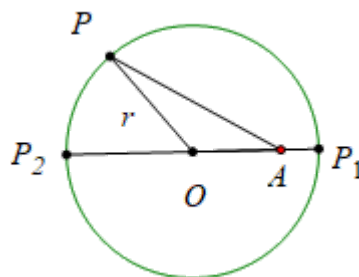
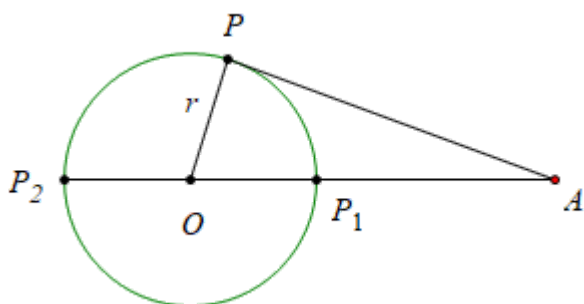


- A. 3 B. $1 + \sqrt{6}$ C. $1 + 3\sqrt{2}$ D. $1 + \sqrt{7}$

4. 共线最值

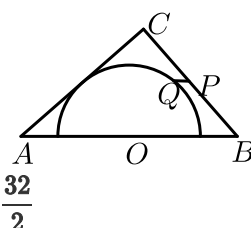
定点与圆上的动点之间的距离：当定点、动点和圆心三点_____时有最大或最小值。

$AP_{max} =$ _____ , $AP_{min} =$ _____ .



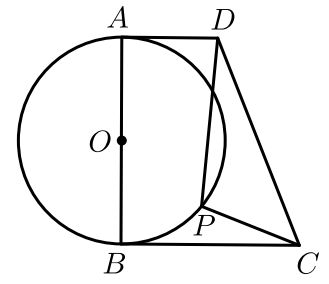
栗子12

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，以边 AB 的中点 O 为圆心，作半圆与 AC 相切，点 P ， Q 分别是边 BC 和半圆上的动点，连接 PQ ，则 PQ 长的最大值与最小值的和是（ ）。



- A. 6 B. $2\sqrt{13} + 1$ C. 9 D. $\frac{32}{2}$

25. 已知： AB 是 $\odot O$ 的直径， AD 、 BC 是 $\odot O$ 的切线， P 是 $\odot O$ 上一动点，若 $AD = 3$ ， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，则 $\triangle PCD$ 的面积的最小值是（ ）。



A. 2

B. 4

C. 8

D. 9